

数学を学ぶ意味

ネットワーク情報学部准教授
土屋翔一

つちや しょういち

1984年 神奈川県生まれ。横浜国立大学環境情報学府博士課程修了。博士（学術）。専門はグラフ理論、離散数学、応用数学。趣味は格闘技、漫画。

ワインの分け方と数学の定理

数学の定理とは正しいことが証明された命題である。ほとんどの人は数学の授業などで定理を目にしたことがあると考えられるが、その中には、日常生活に活用できる定理も存在する。そのような例を紹介するため、次のクイズを考えてみてほしい。

Q: 5人の大学教員 (A、B、C、D、E) が5本のワイン (1、2、3、4、5) を持ちよって飲み会をやるうとしたが、学部長に注意されたので、1本ずつワインを持ち帰り、オンライン飲み会をやることにした。その際、この5人は次のように自分の希望を言った。

- A 「私は飲みなれている1か2がよい。」
- B 「私は飲んだことのない2がよい。」
- C 「私は1、5以外がよい。」
- D 「私は2か3のどちらかがよい。」
- E 「私は1、2が飲めない(それ以外がよい)。」

このとき、全員の希望を満たすワインの分け方はあるか。



このクイズの解答は「条件を満たす選び方がある」で、実際、Aが1、Bが2、Cが4、Dが3、Eが5を持ち帰ることにすればよい(少し考えると、これ以外の分け方ではうまくいかないこともわかる)。解き方は、いろいろな方法が考えられるが、一例として図1のように5人の希望を図示し、始点と終点が重ならないよう5本の矢印を選ぶと、解答が得られる。

今回紹介したクイズでは、ちょうどよい分け方が存在したが、どのような状況でも全員の希望を満たす

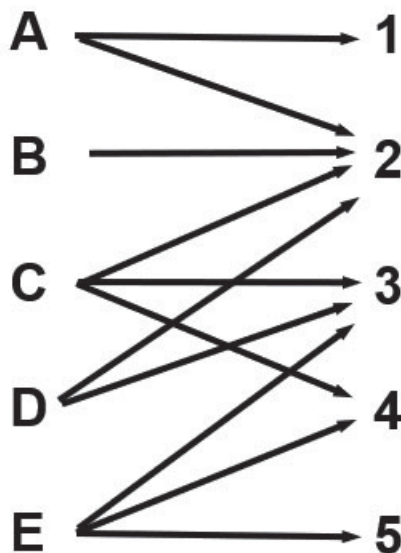


図1 ワインの希望

分け方が存在することが保証できるわけではない。もともとワインが4本しかない場合、1本ずつワインを持ち帰ることは不可能であるとすぐにわかる。また、ワインの本数が十分にあったとしても、特定のワインに希望が集中している場合(例えば、A、B、Cの3人が全員、1か2のワインだけを希望している状況)も、全員の希望を満たすことはできない。一方、そのような明らかにうまくいかない状況を除けば、全員の希望を満たす分け方が存在することが数学的に示されている。

定理 (Hall)

ワインが数本あり、 n 人の人が持ち帰りたいワインの希望を挙げている。全員の希望を満たすように1本ずつワインを持ち帰るための必要十分条件は、どの k 人 ($k \leq n$) に対しても、その k 人のうちの少なくとも1人が希望するワインの本数が k 本以上となっていることである。

グラフ理論とは

私の専門分野は「グラフ理論」で、これは、頂点と頂点同士をつないだ辺からなる構造(グラフ)について考察する数学の一分野である。グラフ理論では、ものともものつながりを抽象化して表現することができ、それをもとに問題解決を進めることが可能となる。例えば、人同士のつながりや街と街をつなぐ道路網などもグラフで表現することができる。前ページで紹介したワインの分け方のクイズは、教員とワインを頂点、各教員のワインの希望を辺とするグラフ(図2)を考えると、「このグラフは端点を共有しない辺を5本持つか?」という形に翻訳することができ、翻訳した問題で条件を満たす5本の辺を見つける(図3)ことで、クイズの解も得られる。また、端点を共有しない辺の集まりをマッチングとよぶことにすると、前ページで紹介した定理は次のように表現できる。

定理 (Hall)

G を2つの頂点集合 X 、 Y とそれらの集合の間を結ぶ辺からなるグラフとする。このとき、 G が X の頂点をすべて含むマッチングを持つための必要十分条件は、 X の任意の部分集合 X' について、 X' の少なくとも1頂点と結ばれている Y の頂点の個数が X' の頂点数以上となることである。

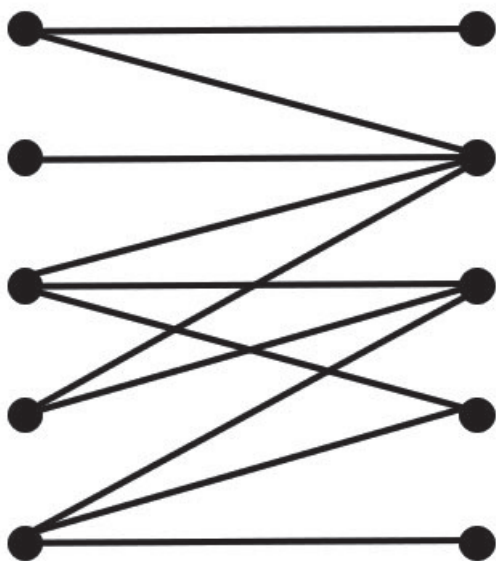


図2 ワインの希望のグラフ

このような抽象的な表現は、人によっては、少し難しく感じてしまう一因となりうる。しかしながら、抽象的な表現を用いることによって、ワインの分け方以外の場面でも定理を活用できるようになる。例えば、「得意分野を活かした仕事の割り振り」や「2つのグループに属する人同士のペア決め」などに利用することができる。また、定理同士の関連(包含関係や同値関係など)を考察する際にも役立つ。

大学で数学を学ぶ意味

大学生がグラフ理論を学ぶことは必須ではないが、できるだけ在学中に(高校生までの学習内容を超えたレベルの)数学を学ぶ経験をした方がよいと私は考えている。その理由は論証によって正しさを追求する数学の特性にある。この特性により、「何故そのようなことが成り立つのか?」や「この公式や定理は何を意味しているのか?」などをじっくりと考えることで、論理的に物事を考察する力を養うことができる。論理的に考察する力が身につくと、物事を体系的に整理して理解することができるようになるため、分析力や問題解決能力の向上も期待できる。分析力や問題解決能力は、仕事や日常生活など様々な場面で活用できる汎用性の高い能力である。したがって、大学生が数学を学ぶことでこのような能力を伸ばすことは有益といえる。

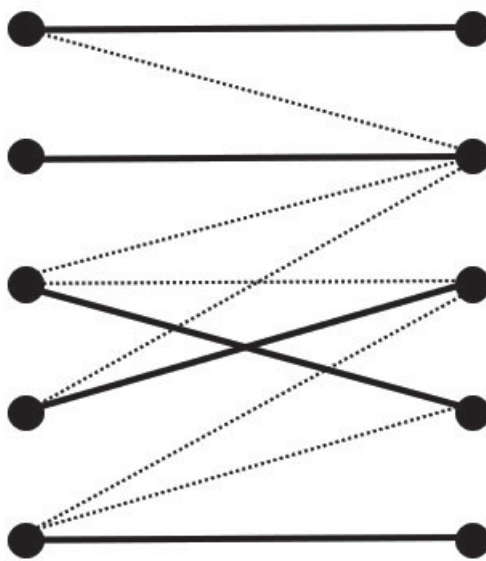


図3 グラフのマッチング